Devoir sur Table 4

Durée : 4h

- Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1 Étude de la cissoïde droite

On désigne par D la droite d'équation $x = 2$ et par C le cercle de centre $M_0(-1, 0)$, de rayon 1.

Pour tout nombre réel t, on désignera par :
- $H(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et de la droite D.
- $M(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et du cercle C (avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(t)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

1. Donner une équation cartésienne du cercle C.
2. Déterminer les coordonnées de $M(t)$ et $H(t)$.

   On note $J(t)$ le milieu $J(t)$ du segment $[M(t), H(t)]$.
3. Vérifier que $J(t)$ a pour coordonnées $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$
4. Déterminer le vecteur dérivé à la courbe $t \mapsto J(t)$, puis en déduire les points stationnaires (c'est-à-dire non réguliers) de celle-ci.
5. En déduire que, pour $t_0 \neq 0$, la tangente à la courbe $t \mapsto J(t)$ au point $J(t_0)$ a pour équation $t_0(t_0^2 + 3)x - 2y = t_0^3$.
6. Étudier la nature du point $J(0)$.
7. Dresser le tableau des variations des coordonnées $x(t)$, $y(t)$ du point $J(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$
8. Représenter sur une même figure sur le papier millimétré joint, la droite D, le cercle C, et le support de cette courbe $t \mapsto J(t)$.
9. Montrer que le support de la courbe $t \mapsto J(t)$ est inclus dans la courbe d'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.
10. Réciproquement soit $M(x, y)$ un point de la courbe d'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$. Montrer qu'il existe un réel t tel que $M(x, y) = J(t)$.

Problème 1 Racines carrées d'un endomorphisme

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fine n
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ on notera :
$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E)\ ,\ h^2 = f\}$$

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie I

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique
5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2..
6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$,
8. Déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

Partie II

Soit f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. (a) Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.
   (b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{Id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
10. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
11. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.
12. Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.
13. (a) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f.
    (b) Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.
14. (a) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
    (b) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.
15. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie III

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :
$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \mathrm{Id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

16. (a) Calculer $(f - \lambda \mathrm{Id}) \circ (f - \mu \mathrm{Id})$.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(f-\mu\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f-\lambda\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{Id})$

(c) Déterminer deux réels a et b tel que $a(X-\lambda)+b(X-\mu)=1$

(d) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{Id})$

(e) Qu'en déduit-on sur f ?

17. Déduire de la relation trouvée dans la question 16.(a) que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

18. Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.
19. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$: $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$
20. Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.
21. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.
22. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.
23. Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que ${p'}^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
24. En déduire que si $\dim(E) \geqslant 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Problème 2

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.

On admet que

$$\forall m \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Partie I — Un produit scalaire sur E

1. Établir que

$$\forall (\alpha,\beta) \in [0,+\infty[^2 \qquad \alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

2. En déduire que, pour tout $(u,v) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

   On note $\langle \cdot,\cdot \rangle$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u,v) \in E^2$, associe $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

   On notera la présence du facteur $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. (a) Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) Montrer que l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

4. Démontrer que $\mathbb{R}[X] \subset E$.

   On note encore $\langle \cdot,\cdot \rangle$ la restriction à $\mathbb{R}[X]$ ou à $\mathbb{R}_n[X]$, pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$ sur E. On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ ou sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   On note $\|\cdot\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$, définie, pour tout $u \in E$, par : $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$

Partie II — Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x), \qquad \text{où } w^{(n)} \text{ désigne la dérivée } n\text{-ième de } w.$$

En particulier : $H_0 = 1$.

5. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ *On fera figurer les calculs sur la copie.*

6. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
   (c) Contrôler alors les résultats obtenus en 5. et calculer H_4 *On fera figurer les calculs sur la copie.*
7. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.
8. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

   Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III — Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

9. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\langle P', H_{n-1}\rangle = \langle P, H_n\rangle$$

   où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur F défini en 2..

   On pourra effectuer une intégration par parties
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: $\langle P, H_n\rangle = 0$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale dans $\mathbb{R}[X]$.
10. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0\rangle$, où $\| \cdot \|$ est définie en 2.
   (b) En déduire la valeur de $\|H_n\|$.
12. On prend dans cette question $n = 2$.
   (a) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$
   (b) Déterminer, pour $k \in [\![0, 2]\!]^2$ $\langle X^k, H_0\rangle$ et $\langle X^k, H_1\rangle$
   (c) Donner la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.